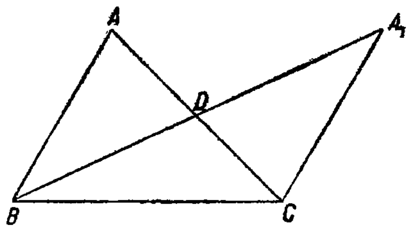
угла как величины исходят тоже не из эвклидова принципа *перемещений*, а определяют угол, скорее, как часть целого оборота. Но такое определение содержит в себе гипотезу, что эта часть обладает величиной, притом такого рода, что для нее безразлично, совершают ли целый оборот вокруг некоторой единственной точки или же разлагают его на ряд частичных оборотов вокруг различных точек. Нетрудно убедиться, что это представляет специальную гипотезу, пригодную, как и эвклидова аксиома, лишь для плоскости. Достаточно заменить плоскость сферической поверхностью, а прямые — дугами больших кругов, чтобы названная гипотеза перестала быть правильной.

5. Большее, однако, значение, в связи с вопросом об отношении эвклидовой аксиомы ко всей его системе, имеет попытка Лежандра, связанная, действительно, с другими гипотезами Эвклида. Хотя, опираясь на эти гипотезы, он не может доказать общей теоремы о сумме углов треугольника, но ему удается доказать, что *сумма углов не больше двух прямых*. Один из способов, которыми он пользуется для получения этого результата, повторяет довольно точно ход рассуждений Эвклида при доказательстве теоремы I, 16, где греческий геометр показывает, что внешний угол, смежный с углом C треугольника ABC, больше каждого из двух других углов, например A. Для доказательства этого соединяют середину D стороны AC с B и берут затем на продолжении прямой BD отрезок $DA_1 = BD$; в таком случае сумма углов треугольника A_1BC равна сумме углов треугольника ABC и угол BCA_1 равен сумме углов A и C первоначального треугольника; отсюда следует, что $A + C < 2$ прямых или что A меньше угла, смежного с C. Лежандр повторяет указанную нами здесь операцию, стараясь каждый раз, чтобы угол при B был наименьшим углом непрерывно преобразуемого треугольника у всякого нового получаемого таким образом треугольника та же сумма углов, и у него имеется один угол, B или A_1, который равен половине наименьшего из предыдущих углов или меньше этой половины. Согласно одному принципу, который Эвклид устанавливает потом в связи с методом доказательства путем исчерпывания, можно таким путем получить, наконец, треугольник, в котором один угол меньше любой заданной величины; собственная теорема Эвклида показывает, что сумма других углов меньше двух прямых, а тогда нетрудно доказать, — пользуясь, при желании, методом исчерпывания, — что остающаяся неизменной сумма трех углов не превосходит двух прямых.



Фиг. 12.

Так как здесь удалось добиться столь значительных результатов, не пользуясь одиннадцатой аксиомой (пятым постулатом), то возникало желание итти еще дальше в этом направлении. Надо было исходить при этом из доказанного Лежандром факта, что сумма углов треугольника могла либо равняться двум прямым, либо быть меньше двух прямых; в этом последнем случае можно было доказать, что сумма углов треугольника уменьшается вместе с увеличением площади его. Исходным пунктом по вопросу о пересечении прямых линий являлась лишь гипотеза о замкнутых контурах, однако, можно было доказать, что некоторая данная прямая пересекается с прямой, проведенной через данную точку, если эта последняя прямая находится в одной из пар вертикальных углов, образованных двумя определенными прямыми, проходящими через данную точку. Другие теоремы этой созданной Лобачевским и Больяи (Bolyai) *неэвклидовой* геометрии более сходны с теоремами обыкновенной эвклидовой геометрии.

Мы можем указать еще один вид геометрии, в которой из гипотез Эвклида пользуются лишь гипотезами насчет замкнутых контуров и соответствующими этому гипотезами в пространстве; ее называют Analysis situs.

В наше время с указанными здесь геометрическими исследованиями о гипотезах геометрии связали ряд проблем о происхождении их, относящихся к *теории познания*. Это вопросы о том, представляют ли названные гипотезы результат нашего произвола? Или же они покоятся на врожденных идеях? Или же они представляют истины, заимствованные из опыта? В этом последнем случае мы не